LEZIONE 11 CONT.

- $\min f(x)$ → LINEARE
  $x \in C$ → INSIEME CONVESSO $\subseteq \mathbb{R}^n$

- UN PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE CON FUNZIONE LINEARE E VINCOLI LINEARI (QUINDI UN PROBLEMA DI PL = PROGRAMMAZIONE LINEARE) NON È DETTO CHE AMMETTA SOLUZIONI

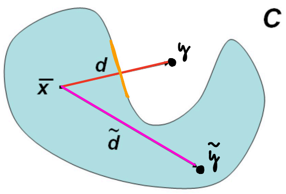
- UN PROBLEMA DI P.L. È UN PROBLEMA CONVESSO

DEFINIZIONE DI DIREZIONE AMMISSIBILE

Definizione 7.1 *Dato l'insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ed il punto $\bar{x} \in C$, si dice che il vettore (direzione) $d = y - \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, con $y \in \mathbb{R}^n$ e $y \neq \bar{x}$, è una* **direzione ammissibile** *per C in $\bar{x}$, se il punto $x = \bar{x} + \alpha d$ appartiene a C, per ogni $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$, con $\bar{\alpha} > 0$.* □

α: LUNGHEZZA DEL "PASSO" LUNGO UNA CERTA DIREZIONE

↳ PARTO DA UN PUNTO $\bar{x}$ E MI MUOVO LUNGO LA DIREZIONE $d = y - \bar{x}$ CON $y \neq \bar{x}$ ($y \in \mathbb{R}^n$, NON A C). SE $x = \bar{x} + \alpha d$ CON $\underbrace{\alpha \in]0, \bar{\alpha}]}_{\text{IN MODO CHE } x \text{ NON ESCA DA } C}$ → $\bar{\alpha} > 0$ E $x \in C$ DI NUOVO, ALLORA d È UNA DIREZIONE AMMISSIBILE



- DIREZIONE AMMISSIBILE, MA NON PER TUTTI GLI α, SOLO QUELLI FINO A IN MODO CHE $x = \bar{x} + \alpha d \in C$

- DIREZIONE AMMISSIBILE PER TUTTI GLI α FINO A $\tilde{y}$

Figura 20: Direzioni ammissibili d a $\tilde{d}$ per l'insieme C nel punto $\bar{x}$.

DEFINIZIONE DI DIREZIONE DISCESA

Definizione 7.2 *Sia data la funzione $f(x)$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ed il vettore $d \in \mathbb{R}^n$, con $d \neq \vec{0}$. Considerato il punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice che d è una* **direzione di discesa** *per $f(x)$ in $\bar{x}$ se esiste un $\bar{\alpha} > 0$ tale che*

$$f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x}), \qquad \forall \alpha \in (0, \bar{\alpha}].$$

↓

SE AGGIUNGO LA DIREZIONE MOLTIPLICATA PER $\alpha > 0$ ALLA FUNZIONE, SE È MINORE (STRETT.) RISPETTO A $f(\bar{x})$ ALLORA d È DIREZIONE DI DISCESA

↳ COME PRIMA, α È IL "PASSO" LUNGO LA DIREZIONE d

PROPOSIZIONE 7.1: SE HO $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ E $\nabla f(\bar{x})^T \cdot d < 0$ ALLORA d È DIREZIONE DI DISCESA:

Proposizione 7.1 *Data la funzione $f(x)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$; sia $d \in \mathbb{R}^n$, con $0 < \|d\| < \infty$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Sia $\nabla f(\bar{x})^T d \neq 0$; allora, d è una direzione di discesa per $f(x)$ in $\bar{x}$ se e solo se risulta*

$$\nabla f(\bar{x})^T d < 0.$$

↳ SE HO $\nabla f(\bar{x}) \cdot d < 0$ → DISCESA
ALLORA $\nabla - f(\bar{x}) \cdot d$ È NECESSARIAMENTE < 0 INVERTENDO ANCHE d.

↳ ESEMPIO: $f(x) = x^2$

$\nabla f(x) = 2x$ → SUPPONIAMO $x = 1$

$\nabla f(1) = 2 \Rightarrow d = -1 : \nabla f(x) \cdot d = (2)(-1) = -2 < 0 \Rightarrow d$ È DI DISCESA

$-\nabla f(1) = -2 \Rightarrow d = 1 : -\nabla f(x) \cdot d = (-2)(1) = -2 < 0 \Rightarrow d$ È DI DISCESA

ESEMPIO 7.2

Esempio 7.2 *Nel caso in cui la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia* lineare *(cioè del tipo $f(x) = c^T x$, $c \in \mathbb{R}^n$), ovvero* affine *(ossia del tipo $f(x) = c^T x + \bar{c}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\bar{c} \in \mathbb{R}$, come da Definizione 2.11), risulterà*

$$\nabla f(x) = c, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, dal momento che il gradiente è costante, si avrà $\nabla f(x)^T d < 0$ se e solo se $\nabla f(x)^T d = c^T d < 0$.

$f(x) = c^T x + \bar{c}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\bar{c} \in \mathbb{R}$

$\nabla f(x) = c^T \Rightarrow$ LA DIREZIONE SARÀ DI DISCESA $\Leftrightarrow c^T d < 0$ ($\nabla f(x) d \,\|\, c^T d$)

$c^T = (c_1, c_2, c_3 \dots c_n)$ $\quad x = (x_1, x_2 \dots x_n)$

CONCRETAMENTE: $\bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \bar{c}x + c = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + c$

$\nabla f(x) = \bar{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

d È DISCESA SE: $\bar{c} \cdot d < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} d < 0$

ESEMPIO $d = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{c} \cdot d = 2(-1) - 1(0) + 3(-1) = -5 < 0$ ✓ $\Rightarrow$ È DI DISCESA

PROPOSIZIONE 7.2

Proposizione 7.2 *Dato il problema (27) con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso (ma $f(x)$ non necessariamente convessa), condizione necessaria affinchè il punto $\bar{x} \in C$ sia un punto di minimo locale per $f(x)$ su C è che*

$$\nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \geq 0, \qquad \forall x \in C. \tag{29}$$

(27) = MINIMIZZAZIONE: $\min f(x)$, $x \in C$

LEZIONE 12

- LA PROPOSIZIONE 7.2 DICE CHE SE $\nabla f(\bar{x})^T \underbrace{(x - \bar{x})}_{\text{COME SE FOSSE } d \text{ NELLA PROP. 7.1} \Rightarrow \text{DIREZIONE DI SALITA IN QUESTO CASO}} \geq 0$ $\forall x \in \underset{\text{CONVESSO}}{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ ALLORA $\bar{x} \in C$ PUÓ ESSERE (MA NON È SICURO) UN MINIMO LOCALE

  SE LA CONDIZIONE NON È RISPETTATA, ALLORA $\bar{x}$ NON È SICURAMENTE MINIMO LOCALE

- ESEMPIO IN $\mathbb{R}^2$

$f(x, y) = x + y$

$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\} \Rightarrow$ SCELGO ESEMPIO $\overbrace{(x, y)}^{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

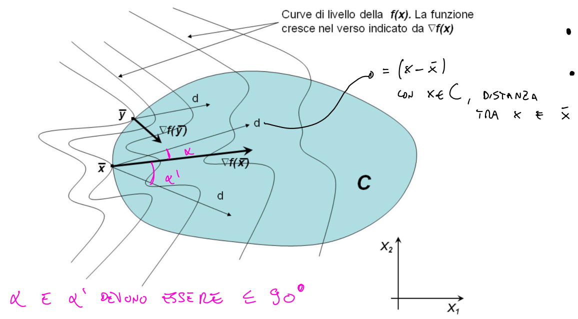
$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

SE $(x, y) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in C$ GENERICO, $(x, y) - \overline{(x, y)} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

$\nabla f(x, y) \cdot (x - \bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = 1 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 = x_0 + y_0$

SAPENDO CHE x_0, y_0 SONO ENTRAMBI POSITIVI, ALLORA IL RISULTATO È POSITIVO □

- SPIEGAZIONE GEOMETRICA (f NON È CONVESSA) $\rightarrow$ x PUÓ ESSERE MIN. LOCALE. • CON f CONVESSA, x È UN MINIMO GLOBALE



α E α' DEVONO ESSERE $\leq 90°$

Figura 21: Condizioni Necessarie di minimo locale con C convesso (la funzione $f(x)$ è continuamente differenziabile ma non è convessa). La figura è rappresentata nel piano delle variabili. La funzione 'cresce' nella direzione indicata da $\nabla f(x)$, in base al Lemma 3.1. La condizione $\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0$ o $\nabla f(\bar{y})^T d \geq 0$, per ogni direzione d ammissibile per C, è soddisfatta. Si noti che i punti $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ sono entrambi punti di minimo locale, ed appartengono a curve di livello diverse.

- $f(x)$ CONVESSA
- C CONVESSO

$\Big\}$ $\nabla f(x)(x - \bar{x}) > 0 \Rightarrow$ DIREZIONE SALITA $\wedge$ $\bar{x}$ MIN. GLOBALE

$x \in C \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad \bar{x} \in C \subseteq \mathbb{R}^n$

???

$\nabla f(x)(x - \bar{x}) = 0 \Rightarrow$ DIREZIONE ORTOGONALE $\wedge$ POSSIBILE MIN.

$\nabla f(x)(x - \bar{x}) < 0 \Rightarrow$ DIREZIONE DISCESA $\wedge$ $\bar{x}$ NON MIN LOCALE (NON SO SE MAX O MENO)

- **ESEMPIO:**

POSSO MINIMIZZARE / TROVARE IL MINIMO DI UNA FUNZIONE LINEARE?

$$f(x) = c^T x \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \quad \text{SSE} \quad c = (0, 0, 0, \dots 0)$$

- **TABELLA RIASSUNTIVA**

CASO	GRADIENTE	MINIMO ESISTE?
$x \in \mathbb{R}^m, c \neq 0$	$c \neq 0$	NO, f NON È LIMITATA INFERIORMENTE
$x \in \mathbb{R}^n, c = 0$	0	f COSTANTE $\Rightarrow$ OGNI PUNTO È MINIMO
$x \in C \subset \mathbb{R}$	c	SÍ, C È CHIUSO E LIMITATO

PROPOSIZIONE 7.3

Proposizione 7.3 *Dato il problema (27) con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f(x)$ continuamente differenziabile in un insieme aperto contenente C, ed $f(x)$ convessa su C. Condizione* **necessaria e sufficiente** *affinchè il punto $\bar{x} \in C$ sia un punto di minimo locale per $f(x)$ su C è che*

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0, \qquad \forall x \in C. \tag{32}$$

→ È ANCHE GLOBALE

DIM.

- UTILIZZO LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONVESSA!

→ PROP. 5.3

$$f(y) \geq f(x) + \underbrace{\nabla f(x)^T (\overset{x - \bar{x}}{y - x})}_{\geq 0 \text{ PER PROP. } 7.3}$$

CAMBIO $y \to x$ $\quad x \to \bar{x}$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \overset{\text{IMPLICA}}{\Longrightarrow} \text{CHE } \bar{x} \text{ È P.TO DI MINIMO}$$

→ GEOMETRIA ASSOCIATA

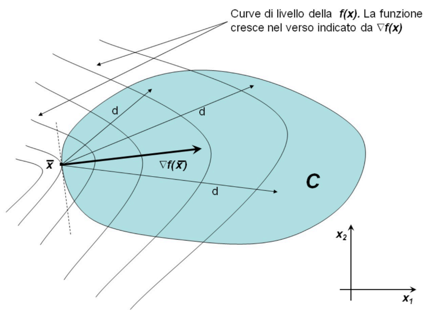


Figura 22: Condizione Necessaria e Sufficiente di minimo locale per $f(x)$ in $\bar{x}$, con C convesso. La figura è rappresentata nel piano delle variabili. La funzione $f(x)$ è convessa su C, quindi per la Proposizione 5.3 i suoi insiemi di livello (parzialmente disegnati in figura) sono convessi. Il punto $\bar{x}$ è un minimo locale (*e quindi anche globale*) della funzione $f(x)$ su C.

- **P.L. $\Rightarrow$ FUNZIONI AFFINI / LINEARI**

$\overset{\text{CONVESSO}}{C} \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ AFFINE: → SIA CONVESSA CHE CONCAVA

$$f(x) = c^T x + \bar{c} \qquad c \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{c} \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ È CONVESSA ED IL PROBLEMA $\min_{x \in C} f(x)$ È UN PROBLEMA CONVESSO

→ PROBLEMA DI P.L.

- **DEFINIZIONE DI IPERPIANO**

Definizione 7.3 *Data la funzione lineare $g(x) = a^T x$, con $a \in \mathbb{R}^n$, l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che soddisfa l'equazione*

$$a^T x = \bar{a}, \qquad \bar{a} \in \mathbb{R},$$

si dice **iperpiano**. → È UN INSIEME CONVESSO SEMPRE □

→ 2 VARIABILI: RETTA

3 DIMENSIONI: PIANO

≥ 4 IPERPIANO

- DEFINIZIONE DI SEMISPAZIO CHIUSO

Definizione 7.4 *Data la funzione lineare $g(x) = a^T x$, con $a \in I\!R^n$, l'insieme dei punti di $I\!R^n$ che soddisfa la disequazione (analogamente per la disequazione '$\leq$')*

$$a^T x \geq \bar{a}, \qquad \bar{a} \in I\!R,$$

si dice **semispazio chiuso**. □

$\Rightarrow$ ESTENSIONE DI IPERPIANO: ANZICHÉ PRENDERE SOLO I PUNTI SULLA RETTA, PRENDO ANCHE TUTTI I PUNTI "SU UNO DEI DUE LATI $(\leq, \geq)$"

- SE PRENDO UN N° LIMITATO DI $\underbrace{\text{IPERPIANI}}_{\text{CONVESSI}}$ E $\underbrace{\text{SEMISPAZI CHIUSI}}_{\text{CONVESSI}}$ E NE FACCIO L'INTERSEZIONE, ALLORA OTTENGO UN POLIEDRO

→ PRENDO UNO SPAZIO E DIVIDO A METÀ: CONVESSO

→ L'INTERSEZIONE RISULTANTE SARÀ A SUA VOLTA CONVESSA

ESEMPI

1) IPERPIANO: $H = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 4 \}$ DEVE SODDISFARE $\underbrace{a^T x = b}$ CON $b \in \mathbb{R}$

→ $\mathbb{R}^2 \to$ RETTA

→ I PUNTI SODDISFATTI APPARTENGONO ALL'IPERPIANO

$x = (0,2)$: $0 + 2 \cdot 2 = 4$
$x = (4,0)$: $4 + 2 \cdot 0 = 4$
$x = (2,1)$: $2 + 2 \cdot 1 = 4$

2) SEMISPAZIO CHIUSO

$S = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 4 \}$

TUTTI I PUNTI AL DI SOTTO (O SULLA RETTA), QUINDI OLTRE AI PUNTI DI PRIMA (1) POTREMMO AVERE:

$x = (0,0) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
$x = (1,1) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$S = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \geq 4 \}$ OLTRE AI PUNTI SULLA RETTA:

$x = (3,3) = 3 + 2 \cdot 3 = 9$
$x = (2,2) = 2 + 2 \cdot 2 = 8$

- OVVIAMENTE L'INTERSEZIONE TRA I DUE SEMISPAZI MI DÀ L'IPERPIANO:

$$a^T x = \bar{a} = \begin{cases} a^T x \geq \bar{a} \\ a^T x \leq \bar{a} \end{cases}$$

- DEFINIZIONE DI VINCOLO ATTIVO

Definizione 7.6 *Dato il problema (40) si consideri il vincolo i-simo del poliedro ammissibile $P = \{x \in I\!R^n : Ax \geq b\}$, i.e. $a_i^T x \geq b_i$, $i = 1, \ldots, m$. Si dice che nel punto $\bar{x}$ il vincolo i-simo è un* **vincolo attivo** *se $a_i^T \bar{x} = b_i$. Si indica inoltre con $I(\bar{x})$ l'insieme di tutti i vincoli di P attivi in $\bar{x}$, i.e.*

$$I(\bar{x}) = \{i : a_i^T \bar{x} = b_i\}.$$

DA SPECIFICARE

- VINCOLO ATTIVO IN $\bar{x}$

ESEMPIO

→ IDENTIFICA IL POLIEDRO $P = \{ x \in \mathbb{R}^m : Ax \geq b \}$

- $Ax \geq b$: $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$

$a_i^T x \geq b_i \mid i = 1 \ldots m$

VINCOLI "PER ESTESO"

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

- $x + y + z \geq 1$
- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $z \geq 0$
- $-x - y \geq -2$

OGNI VINCOLO DEFINISCE UN SEMISPAZIO

• L'intersezione dei semispazi forma un poliedro (n° finito di semispazi)

↳ un vincolo viene detto <u>attivo in un punto</u> se viene soddisfatto con uguaglianza (es: $\overset{①}{x_1 + x_2 \le 4} \wedge \overset{②}{x_1 \ge 2} \Rightarrow$ il punto $(2,2) \in \mathbb{R}^2$ viene soddisfatto per uguaglianza, allora sia ① che ② sono vincoli attivi per il punto $(2,2)$)

• se ho 5 vincoli, in $\mathbb{R}^3$ allora se ho <u>almeno</u> 3 vincoli attivi per un certo punto x, allora quel punto è vertice del poliedro

---

LEZIONE 13

• I punti che ci interessano (del poliedro) stanno sulla superficie esterna e non all'interno

↳ quelli associati ai vincoli attivi

PROPOSIZIONE 7.5

Proposizione 7.5 *Dato il problema (40), il gradiente $\nabla f(x) = c$ della funzione obiettivo è ortogonale alle curve di livello della $f(x)$, ed è orientato nel verso crescente della $f(x)$.*

dove $f(x) = c^T x$ (funz. lineare)

• Curve di livello: punti in cui la funzione ha gli stessi valori:

↳ rette in $\mathbb{R}^2$

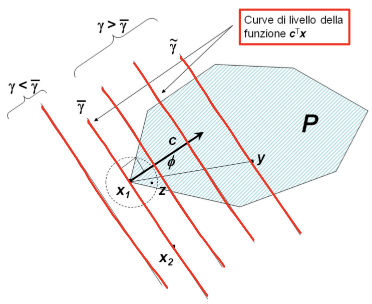
↳ piani in $\mathbb{R}^3$

↳ iperpiani in $\mathbb{R}^n$

quindi per es. in $\mathbb{R}^2$ le curve di livello sono tutte le rette $c^T x$ = costante (mi "traslo" ma non mi allungo e non ruoto)

• Il vettore gradiente: punta nella direzione in cui $f(x)$ cresce più veloce

↳ ha direzione perpendicolare (ort.) alle curve di livello



• Scelgo $\bar{y}$ e $\tilde{y}$, suppongo $\bar{y} < \tilde{y}$

↳ aumentando gamma, passo $\underbrace{\text{dall'angolo più in basso a quello più in alto}}_{\text{verso direzione di crescita}}$ ⟶ c orientato in direzione di crescita delle curve

verso direzione di crescita $\Rightarrow c$ (ossia ∇f) è ortogonale alle curve di livello

• Funziona allo stesso identico modo anche per funzioni affini oltre che lineari.

• Poliedro:

esempi

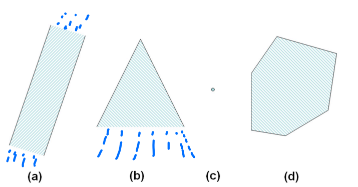


Figura 24: Esempi di possibili forme che può assumere il poliedro ammissibile P di (40).

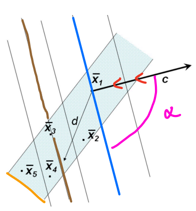
⟹ può anche essere vuoto

a, b non limitati

c intersezione tra due rette (= iperpiani)

↳ sviluppiamo esempio a) della striscia:

e minimizzare $c^T x = f(x)$



• Trovo il verso di c: vado <u>al contrario</u> per minimizzare

• scelgo una direzione d qualsiasi dalla curva in poi, perché l'angolo α deve essere ottuso ($90° < \alpha \le 180°$)

• arrivo con d fino ad una certa <u>curva</u> e, se è minore di quella <u>precedente</u>, ripeto i passaggi, traslando c fino alla nuova curva e ripeto

↳ non ammette soluzione di minimizzazione: parte bassa illimitata

↳ se fosse stata limitata, avrei avuto soluzione

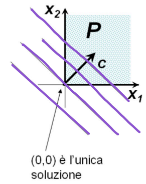
ESEMPIO 7.5

Esempio 7.5 *Vogliamo risolvere graficamente il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned} &\min x_1 + x_2 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\vec{c} = \nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ GRAFICAMENTE:



$x \geq 0$

$y \geq 0$

CURVE DI LIVELLO

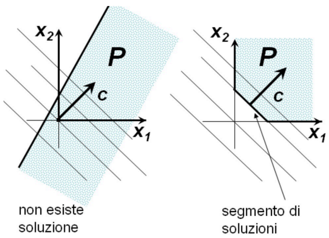
$\vec{c} = (1,1)$

DA ORIGINE A $(1,1)$

VERSO IN CRESCENZA DI

CURVE DI LIVELLO (ORTOGONALI A c)

ALTRI ESEMPI



P = POLIEDRO   NP = NON-POLIEDRO

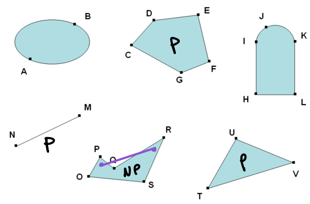


Figura 29: Esempi e controesempi di vertici per insiemi di $\mathbb{R}^n$. I punti O-S non sono vertici in quanto non appartengono ad un insieme convesso.

N - M : 2 SEMISPAZI INTERSECATI

T - U - V : 3 SEMISPAZI

O - P - Q - R - S : INSIEME NON CONVESSO : SE PRENDO 2 PUNTI, IL SEGMENTO NON STA TUTTO NELL'INSIEME

DEFINIZIONE DI VERTICE O PUNTO ESTREMO

→ IL PUNTO DEVE APPARTENERE ALL'INSIEME

Definizione 7.7 *Dato l'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che $\bar{x}$ è un* **punto estremo** *o* **vertice** *di C se non esistono due punti $y, z \in C$, con $y \neq z$, distinti da $\bar{x}$ e tali che $\bar{x} \in [y, z]$.* □

• OSSIA TALI CHE $\bar{x}$ SI TROVI SUL SEGMENTO CHE COLLEGA y E z.

ESEMPIO

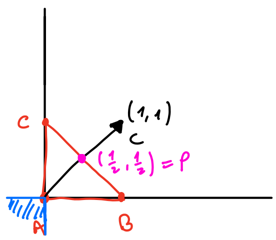
TRIANGOLO IN $\mathbb{R}^2$: $\Longrightarrow$ INSIEME CONVESSO (P.TI INTERNI + FRONTIERA)

$A = (0,0)$

$B = (1,0)$ E MINIMIZZARE $f(x,y) = x + y$

$C = (0,1)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$



PRENDO "d" CON VERSO INVERSO A "c", IN MODO CHE FORMI UN ANGOLO OTTUSO: UNICHE POSSIBILITÀ

P PUÒ ESSER SCRITTO COME COMB. CONV.: $P = \lambda y + (1-\lambda) z$ CON $0 < \lambda < 1$

↳ $P = 0.5\,\underset{B}{(1,0)} + 0.5\,\underset{C}{(0,1)} = (0.5, 0.5)$

↳ FUNZIONA, ALLORA NON È UN ESTREMO

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f(A) = 0+0 = 0 \\ &\bullet\ f(B) = 1+0 = 1 \\ &\bullet\ f(C) = 0+1 = 1 \end{aligned}\right\}$$ MIN = A → VERTICE CHE MINIMIZZA $f(x)$ ①

• A È L'UNICO VERTICE A FORMARE UN ANGOLO

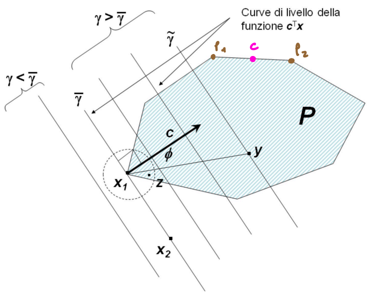
$90 < \alpha \leq 180$

$c = (1,1) \Rightarrow d = (-1,-1)$

$$\left.\begin{aligned} &d^T A = (-1,-1)(0,0) = 0 \\ &d^T B = (-1,-1)(1,0) = -1 \\ &d^T C = (-1,-1)(0,1) = -1 \end{aligned}\right\}$$ MAX = A → P.TO DI MINIMO ②

• SO CHE A - B - C SONO VERTICI PERCHÉ NON POSSO SCRIVERLI COME COMB. CONV. $P = \lambda y + (1-\lambda) z$ CON $0 < \lambda < 1$

LEZIONE 14



⇒ x_1 È VERTICE PERCHÉ: NON POSSO TROVARE ALTRI DUE PUNTI y E z DIVERSI DA x_1 E DIVERSI DA LORO, IN MODO CHE IL SEGMENTO $\overline{yz}$ CONTENGA IL PUNTO x_1

- PER ESEMPIO, c NON È VERTICE PERCHÉ IL SEGMENTO $\overline{p_1 p_2}$ CONTIENE IL PUNTO c

PROPOSIZIONE 7.6

Proposizione 7.6 *Dato il poliedro ammissibile $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ del problema (40), con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, il punto $\bar{x} \in P$ è un vertice di P se e solo se*

1. *esistono almeno n vincoli di P attivi in $\bar{x}$;*
2. *detti $a_i^T x = b_i$, $i \in I(\bar{x})$, tutti i vincoli attivi in $\bar{x}$, vi sono esattamente n vettori dell'insieme $\{a_i\}_{i \in I(\bar{x})}$ che sono linearmente indipendenti (vincoli* **linearmente indipendenti***).*

ESERCIZIO 32

Esercizio 32 *Si trovino tutti e soli i vertici (se vi sono) del poliedro P descritto dalle seguenti disequazioni (si veda la Figura 30)*

$$P: \begin{cases} (I) & x_1 \geq 0 \\ (II) & x_2 \geq 0 \\ (III) & x_2 + 2x_1 \geq 4 \\ (IV) & 2x_2 - x_1 \leq 3 \\ (V) & x_2 + x_1 \leq 6 \\ (VI) & 2x_1 - 6 \leq x_2 \end{cases}$$

(I) → COEFF: $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2$ → $(1,0)$
(II) → $0 \cdot x_1 + 1 x_2$ → $(0,1)$
} L.I. QUESTI 2 VETT. ⇒ $(0,0)$ POTREBBE ESSERE VERTICE.

SODDISFA I ∧ II

↳ MA CON III, $0 \geq 4$ FALSO ⇒ ALLORA NON È UN VERTICE PERCHÉ $\notin P$ DATO CHE NON SODDISFA III

Prima di risolvere l'esercizio calcoliamo il massimo numero possibile di vertici che il poliedro P può ammettere. Questi corrisponderanno, dalla Proposizione 7.6, al massimo numero di coppie (i.e. n-ple) diverse di vincoli che è possibile scegliere tra i 6 vincoli che descrivono P, ovvero[§] *(poichè $m = 6$ ed $n = 2$)*

$$\binom{m}{n} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15.$$

→ "M" VINCOLI E "M" VARIABILI: 15 POSSIBILI VERTICI AL MAX

*

↳ SE ALMENO "M" VINCOLI SONO ATTIVI IN UN PUNTO E TUTTI GLI ALTRI VINCOLI (NON ATTIVI) SON SODDISFATTI, ALLORA IL PUNTO È VERTICE DI P.

- DEVONO ESSERE ANCHE L.I.

In particolare, analizziamo ciascuna coppia di vincoli $(X)-(Y)$, con $X, Y \in \{I, II, \ldots, VI\}$:

- (I)-(II)*: Considerati i vincoli (I) e (II) mettiamo a sistema i corrispondenti vincoli di uguaglianza $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$*

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ottenendo il punto $(0,0)$. Nel precedente punto i vincoli (I) e (II) risultano attivi e linearmente indipendenti, pertanto in $(0,0)$ le 1. e 2. della Proposizione 7.6 sono soddisfatte. Ma il punto $(0,0)$ non è vertice *di P in quanto $(0,0) \in P$ (non soddisfa per esempio il vincolo (III)).*

[§]Si osservi che se $m < n$ non possono esistere vertici nel poliedro.

- (I)-(III)*: Considerati i vincoli (I) e (III) mettiamo a sistema i corrispondenti vincoli di uguaglianza $x_1 = 0$ e $x_2 + 2x_1 = 4$*

COEFF.

$$\begin{cases} x_1 = 0 & \to (1,0) \\ x_2 + 2x_1 = 4, & \to (2,1) \end{cases}$$

→ L.I.? ⇒ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1) - (0 \cdot 2) = 1 =$ L.I. ✓

↳ CONTROLLO GLI ALTRI VINCOLI (II, IV, V, VI) → NON TUTTI SON RISPETTATI ⇒ $(0,4) \notin P$

ottenendo il punto $(0,4)$. Nel precedente punto i vincoli (I) e (III) risultano attivi e linearmente indipendenti, pertanto in $(0,4)$ le 1. e 2. della Proposizione 7.6 sono soddisfatte. Ma il punto $(0,4)$ non è vertice *di P, essendo in esso violato il vincolo (IV)).*

- (II)-(III)*: Considerati i vincoli (II) e (III) mettiamo a sistema i corrispondenti vincoli di uguaglianza $x_2 = 0$ e $x_2 + 2x_1 = 4$*

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_1 = 4, \end{cases} \to \begin{matrix} [0,1] \\ [2,1] \end{matrix}$$

→ L.I ✓ → GLI ALTRI VINCOLI SONO SODDISFATTI PER $\underset{}{\overset{\bar{x}}{(2,0)}}$ → ALLORA $\bar{x}$ È UN VERTICE DEL POLIEDRO

ottenendo il punto $(2,0)$. Nel precedente punto i vincoli (II) e (III) risultano attivi e linearmente indipendenti, pertanto in $(2,0)$ le 1. e 2. della Proposizione 7.6 sono soddisfatte. Inoltre, sostituendo il punto $(2,0)$ anche nei vincoli (I), (IV), (V) e (VI) notiamo che questi sono banalmente soddisfatti, pertanto $(2,0)$ è un vertice *del poliedro P.*

Analogamente a quanto fatto per i casi $(I)-(II)$, $(I)-(III)$ e $(II)-(III)$, lo studente analizzi per conto proprio i rimanenti 12 casi

$$\begin{array}{lll} (I)-(IV), & (I)-(V), & (I)-(VI), \\ (II)-(IV), & (II)-(V), & (II)-(VI), \\ (III)-(IV), & (III)-(V), & (III)-(VI), \\ (IV)-(V), & (IV)-(VI), & \\ (V)-(VI) & & \end{array}$$

e verifichi che gli unici vertici del poliedro P risultano essere i punti $(1,2)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(3,0)$ e $(2,0)$.

• CONSIGLIO PROF: RISOLVO SISTEMA DI UGUAGLIANZE (1), TROVO IL PUNTO → VEDERE SE IL PUNTO SODDISFA GLI ALTRI VINCOLI (2) → VEDERE SE I COEFF. DEI VINCOLI ATTIVI (I VETTORI TROVATI CON QUEI COEFF.) SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI (3)

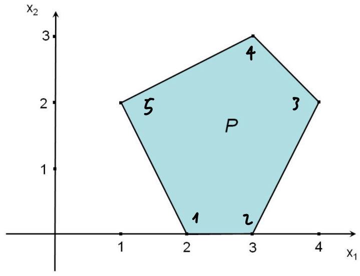


Figura 30: Poliedro P descritto dalle disuguaglianze nell'Esercizio 32. Essendo il poliedro limitato, risulta anche essere un *politopo*.

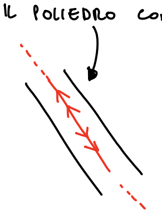
* GUARDANDO LA FIGURA, SO CHE TRA 15 POSSIBILI VERTICI, 10 VERRANNO SCARTATI

LEZIONE 15

DEFINIZIONE 7.8

Definizione 7.8 *Sia dato il poliedro ammissibile $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ del problema (40), con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Dato il punto $\bar{x} \in P$ e la direzione $d \in \mathbb{R}^n$ ammissibile in $\bar{x}$, si dice che P contiene la retta $r = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \bar{x} + \alpha d, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$, se $x \in P$ per ogni $x \in r$.* □

• IL POLIEDRO CONTIENE LA RETTA r SE POSSO ANDARE AVANTI E INDIETRO ALL'INFINITO LUNGO QUELLA DIREZIONE SENZA USCIRE DAL POLIEDRO;



• IMPORTANTE PERCHÉ VUOL DIRE CHE IL POLIEDRO È ILLIMITATO

• SE IL POLIEDRO $\boxed{\text{NON}}$ CONTIENE RETTE, ALLORA SONO POSSIBILI I SEGUENTI 3 CASI:

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PL

MIN $c^T x$ CON $Ax \geq b$

Teorema 7.1 (Teorema Fondamentale della PL) *Dato il problema (40) di Programmazione Lineare, si supponga che il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, non contenga rette. Sono possibili solo i seguenti tre casi:*

1) *il poliedro P è un insieme vuoto (ovvero (40) non ammette soluzioni ammissibili);*
2) *la funzione $f(x) = c^T x$ è illimitata inferiormente sul poliedro ammissibile P;*
3) *il problema (40) ammette almeno una soluzione e questa si trova su uno dei vertici di P.*

• STO MINIMIZZANDO (O MAX) UNA FUNZIONE LINEARE SU UN POLIEDRO DEFINITO DA VINCOLI LINEARI

• LA SOL. DEVE STARE SU UN VERTICE (NO ALL'ESTERNO, NO ALL'INTERNO) OPPURE PUÒ ESSERE UN SEGMENTO SE PARALLELO ALLE CURVE DI LIVELLO E SUL PUNTO DI MINIMO.

• IL POLIEDRO NON DEVE ESSERE VUOTO, ALTRIMENTI NON HO SOLUZIONE
• DEVE ESSERE LIMITATO
• IL POLIEDRO PUÒ ESSERE ILLIMITATO E LA SOLUZIONE PUÒ ESISTERE COMUNQUE

ESEMPIO 7.5

MIN $x_1 + x_2$

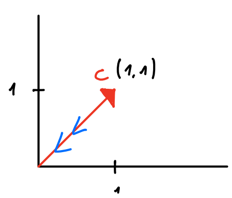
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

$\rightarrow \left.\begin{matrix}(1,0)\\(0,1)\end{matrix}\right\}$ L.I.

$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c$

PROVO $\underbrace{x_1 = 0, \ x_2 = 0}$ → IL PUNTO (0,0) È SOLUZIONE DEL PROBLEMA

1° QUADRANTE PERCHÉ $x \geq 0$ $y \geq 0$



PER MINIMIZZARE: (0,0) RISPETTA IL VERSO

• **RIFORMULAZIONE TH. FOND. PL:** (EVITO IPOTESI SU ASSENZA DI RETTE)

↳ TUTTI I VINCOLI DIVENTANO UGUAGLIANZE → INTRODUCO LE VARIABILI y_i (SURPLUS) CON $y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i^T x - y_i = b_i & i = 1, \dots, m \\ y_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

QUINDI OTTENIAMO UN NUOVO POLIEDRO

$$\hat{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} : (A \vdots -I_m) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, \ y \geq 0 \right\}$$

↳ ADESSO CONTIENE $m + m$ VINCOLI E $n + m$ VARIABILI

SOSTITUISCO $x_i = x_i^+ - x_i^-$ CON $x_i^+ \geq 0$, $x_i^- \geq 0$, $i = 1 \dots n$, OTTENENDO

$$\bar{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n+m} : (A \ -A \ -I_m) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} = b, \ \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

RIDENOMINO $z = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix}$

OTTENGO $\bar{P} = \{ z \in \mathbb{R}^{2n+m} : \bar{A} z = \bar{b}, \ z \geq 0 \}$ DOVE: $\bar{A} = (A \ -A \ -I_m) \in \mathbb{R}^{m(2n+m)}$

$\bar{b} = b \in \mathbb{R}^m$

• A QUESTO PUNTO $\bar{P}$ CONTIENE $2n + 2m$ VINCOLI

⚠ **Problema:**

- Il poliedro originario può **contenere rette** → non è garantito che abbia **solo vertici**.
- Il **teorema fondamentale della PL** richiede che il poliedro non contenga rette (cioè sia "puntato").

✅ **Soluzione: trasformazione del problema**

Passaggi:

1. **Vincoli disuguaglianza → uguaglianze**
Introduzione di **variabili surplus** $y_i \geq 0$
$a_i^T x \geq b_i \quad \Rightarrow \quad a_i^T x - y_i = b_i$

2. **Variabili libere → variabili non negative**
Ogni x_i viene scritto come:
$x_i = x_i^+ - x_i^- \quad \text{con } x_i^+, x_i^- \geq 0$

🎯 **Obiettivo:**

> Costruire un **nuovo poliedro** $\bar{P}$, in uno spazio più grande, ma:
> - Con **soli vincoli di uguaglianza**
> - Tutte le variabili **non negative**
> - **Nessuna retta contenuta ⇒ solo vertici**

📌 **Conclusione:**

> Così possiamo **sempre applicare il teorema fondamentale** della PL,
> senza ipotesi aggiuntive sulla forma del poliedro.

→ MOTIVI E SPIEGAZIONE DELLA TRASFORMAZIONE

• IL NUOVO POLIEDRO $\bar{P}$ PUÒ ESSERE DEFINITO TALE? ⇒ USO DEF.: UN POLIEDRO È UNA INTERSEZIONE FINITA DI IPERPIANI E SEMISPAZI

↳ $\bar{P} = \{ z \in \mathbb{R}^{2n+m} : \underbrace{\bar{A} z = \bar{b}}_{\text{UGUAGLIANZE IPERPIANI}}, \ \underbrace{z \geq 0}_{\text{DISUGUAGLIANZE SEMISPAZI CHIUSI}} \}$ ⇒ SÌ, È UN POLIEDRO

↳ INOLTRE, <u>NON CONTIENE RETTE</u>, QUINDI PER IL PRIMO TH. PL È UN POLIEDRO

DEFINIZIONE FORMA STANDARD

Definizione 7.9 *Data la matrice $\bar{A} \in \mathbb{R}^{\bar{m}\times\bar{n}}$ ed il vettore $\bar{b} \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$ in (51), con $\bar{m} = m$ e $\bar{n} = 2n + m$, diremo che il poliedro $\bar{P} = \{z \in \mathbb{R}^{\bar{n}} : \bar{A}z = \bar{b}, \quad z \geq 0\}$ è in* **forma standard**. □

TEOREMA PL FORMA STANDARD (COME QUELLO NORMALE, PERÒ SENZA IPOTESI DI ASSENZA DI RETTE)

Teorema 7.2 (Teorema Fondamentale della PL (standard)) *Dato il problema (40) di Programmazione Lineare, lo si trasformi nel problema di Programmazione Lineare (52), dove $\bar{P} = \{z \in \mathbb{R}^{\bar{n}} : \bar{A}z = \bar{b}, \quad z \geq 0\}$, con $\bar{A} \in \mathbb{R}^{\bar{m}\times\bar{n}}$. Sono possibili solo i seguenti tre casi:*

1) *il poliedro $\bar{P}$ è un insieme vuoto (ovvero (52) non ammette soluzioni ammissibili);*
2) *la funzione $f(z) = \bar{c}^T z$ è illimitata inferiormente sul poliedro ammissibile $\bar{P}$;*
3) *il problema (52) ammette almeno una soluzione e questa si trova su uno dei vertici del poliedro ammissibile $\bar{P}$.*

CON: (50) MIN $\bar{c}^T z$

$\bar{A}z = \bar{b}$, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{\bar{m}\times\bar{m}}$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$

$z \geq 0$

$\bar{c} = \begin{pmatrix} +c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}$

- LE SOLUZIONI DI (50) SONO EQUIVALENTI A QUELLE CHE AVREI AVUTO RISOLVENDO (40)
- $\bar{P}$ COSTRUITO IN MODO CHE LE SUE VARIABILI SIANO TUTTE POSITIVE
- SPIEGAZIONE GEOMETRICA: IL NUOVO POLIEDRO STA NEL PRIMO $\underset{\text{POSITIVO}}{\text{ORTANTE}}$ ESTESO (TUTTE VARIABILI ≥ 0) E CIÒ GARANTISCE CHE QUALSIASI RETTA PASSANTE PER UN QUALSIASI PUNTO $\in \bar{P}$ DOVRÀ USCIRE $\Longrightarrow$ IL POLIEDRO NON PUÒ CONTENERE ALCUNA RETTA.

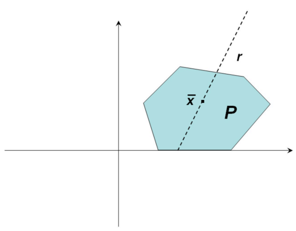


Figura 31: Il poliedro P in *forma standard* non può contenere la retta r.

ESEMPIO 7.13 (NOTA! SE HO PROBLEMA DI MAX, PRIMA LO TRASFORMO IN UN $\overbrace{\text{PROBLEMA DI MINIMO}}^{\text{STUDIO LA FUNZIONE OBIETTIVO PER } -1}$, POI PORTO POLIEDRO IN FORMA STANDARD)

MAX $3x_1 - x_2$ [PROBLEMA]

1) $x_1 \geq 0$ [VINCOLI]
2) $x_1 + x_2 + 1 = 0$
3,4) $-2 \leq 2x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 \leq 5$

4 VARIABILI E 4 VINCOLI

$\parallel$

3 DISUGUAGLIANZE $\Longrightarrow$ AGGIUNGO 3 VAR. SLACK (y_1, y_2, y_3) — DA AGGIUNGERE IN DISUGU.

RISCRIVO TUTTI I VINCOLI IN FORMA DI UGUAGLIANZE: (+ VINCOLI NON NEGATIVITÀ)

≥ 0 $\quad -y_k$

≤ 0 $\quad +y_k$

1) $x_1 - y_1 = 0$

2) $x_1 + x_2 = -1$

3) $2x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 - y_2 = -2$

4) $2x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 + y_3 = 5$

5) $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

LE 4 VAR. NON VI SONO VINCOLI DI NON NEGATIVITÀ SU DI ESSE, ALLORA:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1^+ & -x_1^- & & & & & & & -y_1 & & & = & 0 \\
x_1^+ & -x_1^- & x_2^+ & -x_2^- & & & & & & & & = & -1 \\
2x_1^+ & -2x_1^- & -x_2^+ & +x_2^- & -x3^+ & +x3^- & -6x4^+ & +6x4^- & & -y_2 & & = & -2 \\
2x_1^+ & -2x_1^- & -x_2^+ & +x_2^- & -x3^+ & +x3^- & -6x4^+ & +6x4^- & & & +y_3 & = & 5
\end{array}$$
$$x_1^+,\ x_1^-,\ x_2^+,\ x_2^-,\ x_3^+,\ x_3^-,\ x_4^+,\ x_4^-,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \ \geq\ 0.$$

INFINE TRASFORMO DA MAX. A MIN:

MIN $-3x_1^+ + 3x_1^- + x_2^+ - x_2^-$

RIFORMULANDO IL PROBLEMA INIZIALE IN FORMA STANDARD:

$$\text{MIN } \bar{c}^T z$$

$$\bar{A} z = \bar{b} \implies$$

$$z \geq 0$$

dove

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ +3 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{11}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -6 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -6 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 11},$$

essendo anche

$$z = \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4^+ \\ x_4^- \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{11}.$$